BTS CGO : Epreuve de Mathématiques

SESSION 2013

PROPOSITION DE CORRECTION

Exercice n°1 : (12 points)

Correction :

Partie A :

1. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{33}{1+1417*0} = 33$

On en déduit que la droite d'équation y = 33 est une **asymptote horizontale** à la courbe C_f en $+\infty$.

2. a) $f(x) = \frac{33}{1+1417e^{-0,11x}} = 33 \times \frac{1}{u}$ avec $u = 1 + 1417e^{-0,11x}$

   et donc $u' = 1417 \times (-0,11)e^{-0,11x}$

Donc $f'(x) = 33 \times \frac{-u'}{u^2} = \frac{-33\times1417\times(-0,11)e^{-0,11x}}{(1+1417e^{-0,11x})^2} = \frac{5143,71e^{-0,11x}}{(1+1417\,e^{-0,11x})^2}$

Autre possibilité : utiliser $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

b) Chaque terme de f'(x) est strictement positif sur [0 ; +∞[, en effet e-0,11x est strictement positif pour tout x. On en déduit le tableau suivant :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
f	$\frac{33}{1418}$ ↗	33

$$f(0) = \frac{33}{1+1417e^0} = \frac{33}{1418} \approx 0,023$$

Partie B :

1. $g(x) = \frac{-871}{x-70} + 87,5 = -871 \times \frac{u'}{u} + 87,5$ avec $u = x - 70$ (et u' = 1) or $\frac{u'}{u}$ admet pour primitive $\ln u$

   Une primitive de g est : $G(x) = -871\ \ln(x-70) + 87,5x$

2. $\int_{85}^{110} g(x)dx = G(110) - G(85) = -871\ \ln(40) + 87,5 \times 110 - (-871\ \ln(15) + 87,5 \times 85)$

   $= -871\ln(40) + 9625 + 871\ln(15) - 7437,5 = 871(\ln 15 - \ln 40) + 2187,5$

   $$= 871\ \ln\frac{15}{40} + 2187,5 = 871\ \ln\frac{3}{8} + 2187,5$$

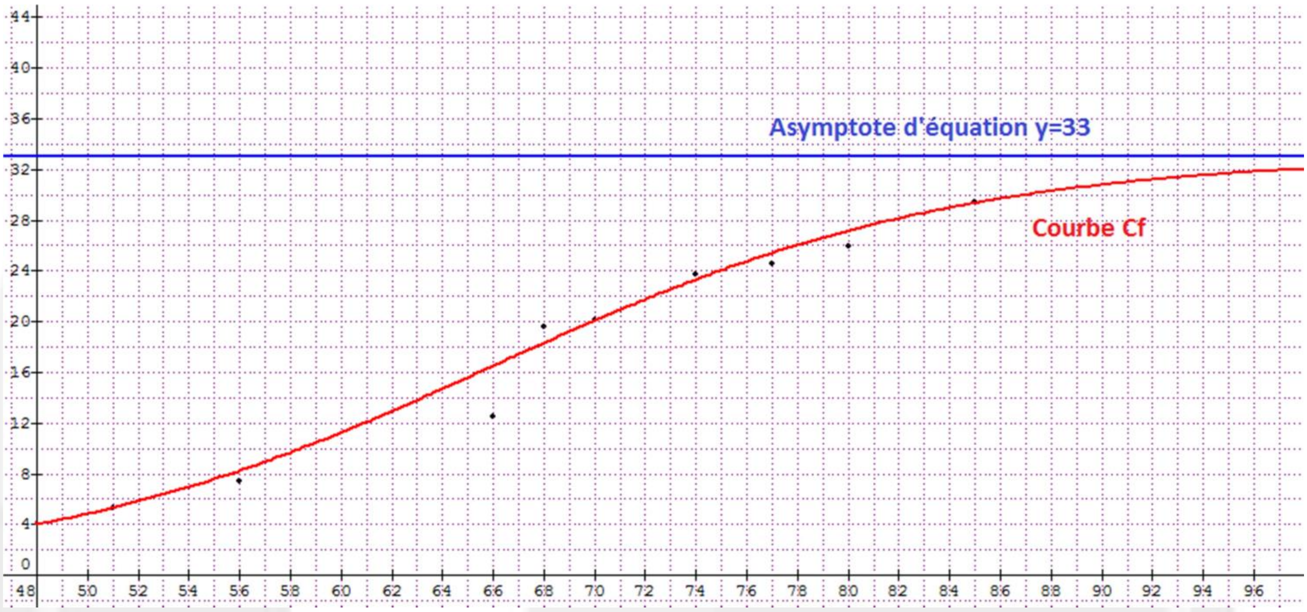
3. $V_m = \frac{1}{110-85}\int_{85}^{110} g(x)dx = \frac{1}{25}\left(871\ \ln\left(\frac{3}{8}\right) + 2187,5\right) \approx 53,3$

Partie C :

1. a)

Tableau de valeurs :

x	48	51	55	60	65	70	75	80	85
f(x)	4,0	5,3	7,6	11,3	15,6	20,1	24,1	27,2	29,4



b) Oui car la courbe passe « près » des points du nuage.

2. La proportion maximale de bacheliers est 33% car f est croissante et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 33$

Partie D :

1. Non le modèle utilisé dans la partie C (c'est-à-dire la fonction f) n'est pas un modèle fiable ici. En effet : on a, par exemple : f(90) ≈ 30,8 qui est une valeur « éloignée » de 43,5.
(De même [(105) ≈ 32,6 qui est une valeur « éloignée » de 61,4)

2. a) $g(85) = \frac{a}{15} + b$ et $g(110) = \frac{a}{40} + b$

b) La courbe associée à g passe par le point de coordonnées (85 ; 29,4) ce qui équivaut à g(85) = 29,4.

Donc $\frac{a}{15} + b = 29{,}4$. Et en multipliant chaque terme de cette équation par 15, on obtient : a + 15b = 2628

De même g(110) = 65,7 donc $\frac{a}{40} + b$ = 65,7. Et en multipliant par 40 : a + 40b = 2628.

On obtient bien le système d'équation (S).

c) $\begin{cases} a + 15b = 441 \\ a + 40b = 2628 \end{cases}$ On peut résoudre ce système, par exemple, par combinaisons, en soustrayant membre à membre. On obtient ainsi :

-25b = 441 - 2628 -25b = -2187 b = $\frac{2187}{25}$ = 87,48

et en remplaçant b par 87,48 dans la première équation :
a + 15 x 87,48 = 441 donc a = 441 - 15 x 87,48 = -871,2

3. a) g est croissante et admet pour limite 87,5 quand x tend vers $+\infty$. Donc le pourcentage maximal de bacheliers est de 87,5%.

   b) Le pourcentage moyen de bacheliers entre 1985 et 2010 est d'environ 53,3%.

Exercice n°2 : (8 points)

Correction :

Partie A :

1. a) Réponse 1. (En effet sur la calculatrice on obtient l'équation y = 14664,4x + 87439,6)

b) Réponse 1.

(En effet le nombre de pèlerins issu du modèle de la régression est : 14664,4 × 5 + 87439,6 =160761,6

Le taux d'évolution est :$\frac{272703-160761{,}6}{160761{,}6} \approx 0{,}696$

2. Réponse 1.

(En effet, calculons p(H) pour chacune des trois propositions :

- pour la réponse 1 : p(H) = 0,43 × 0,7 + 0,06 × 0,4 + 0,51 × 0,5 = 0,58 ce qui correspond aux 58%.
- pour la réponse 2 : p(H) = 0,1898 et pour la réponse 3 : p(H) = 0,425 qui ne conviennent pas)

3. Réponse 3. w10 = −2042. (Que l'on peut trouver, par exemple, à l'aide de la calculatrice en mode suite)

Partie B

1. X suit la loi binomiale de paramètres n = 10 et p = 0, 38.

En effet, on a dix tirages indépendants, où chaque tirage donne deux issues : « venir en France pour des raisons professionnelles » qui est le « succès » de probabilité p = 0,38 et « venir en France pour des raisons touristiques ou personnelles » qui est l' « échec » de probabilité q = 1 − p = 0,62.

2. a) Cela revient à dire qu'un d'entre eux est là pour des raisons professionnelles.

P(X = 1) = $C_{10}^{1} \times 0{,}38^1 \times 0{,}62^9 \approx 0{,}0514$

b) P(X ≥ 1) = 1 − P(X = 0) = 1 − $C_{10}^{0} \times 0{,}38^0 \times 0{,}62^{10} = 0{,}9916$

La probabilité qu'au moins un des dix Allemands soit là pour des raisons professionnelles est 0,9916.

3. Soit $T = \frac{Y-2000}{550}$, T suit la loi normale N (0 ;1)

a) P(Y ≤ 3200) = P (T ≤ $\frac{3200-2000}{550}$) ≈ P(T ≤ 2,18) = Π(2,18) = 0,9854

La probabilité qu'un Allemand, choisi au hasard, parcoure en France une distance inférieure à 3200 km est 0,9854.

b) P (1300 ≤ Y ≤ 2700) = P ($\frac{1300-2000}{550}$) ≤ T ≤ $\frac{2700-2000}{550}$) ≈ P(-1,27 ≤ T ≤ 1,27)

= 2Π(1,27) – 1 = 2 × 0,8980 − 1 = 0,796